Royaume du maroc
Ministère de l' Enseignement,
de la formation professionnelle
de l' Enseignement Supérieur, et de la Recherche Scientifique et de
la Formation des cadres
G.S.Aljabr.fes
Lycée Ibn alyassamine casa .

BAC BLANC (commun) 2020-2021

G.S.Aljabr fes +Lycée Ibn alyassamine casa .
MATHÉMATIQUES

Bac SM Internationale

28 Mai 2021

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques sont non autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 3 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices
on rappel que le condidat doit choisir un exercice soit le quatrième (sur les structures algébriques)soit (le cinquième (sur l' arithmétique) . Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie.
La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'ilest amené à prendre.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1 à 4. la première page est une page de garde

Exercice 1 4pts

on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\quad z^2+(1+2i)z+1+7i=0$

1. Déterminer les racines carées de $u=-7-24i$ (remarquer que u a pour module 25)
2. Déduire les solutions z_1 et z_2 de (E) telque $Re\,(z_1)<0$
3. vérifier que $\frac{z_2}{z_1}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
4. soit θ un argument de z_2 écrire en fonction de θ la forme trigonométrique de $v=1+7i$

Partie II
le plan complexe est muni d'un repère orthonormé
on considère les points A et B d'affixes $a=-2+i$ et $b=1-3i$ et soit $r$la rotation de centre O et d' une mesure d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$ on pose $C=t\circ r(A)$

1. Déterminer l'affixe du point C
2. Montrer que les points O,A,B,C sont cocycliques

Exercice 2 4pts

Dans tout ce qui suit **p un nombre premier tel que $p\equiv 5[6]$ et $p>3$**
et on considère dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation $(E)\quad x^3+y^3=p(x\wedge y)(1+x\vee y)$
soit $(x,y)\in\mathbb{N}^{*2}$ une solution de (E)
on pose $d=x\wedge y$ soit $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$ tel que $x=da$ et $y=db$

1. (a) Justifier que $a\wedge b=1$ et et $x\vee y=dab$ en déduire que
$$d^2\left(a^3+b^3\right)=p\,(1+dab)$$
   (b) montrer que $d^2\wedge(1+dab)=1$ (on pourra utiliser Bezout)
   (c) Déduire que $d=1$ (utiliser Gauss)
   ainsi on a donc $\boxed{\begin{cases}\left(a^3+b^3\right)=p\,(1+ab)\\ a\wedge b=1\end{cases}}$
2. Montrer que $p\wedge b=1$ et $p\wedge a=1$
3. montrer que $a^3\equiv -b^3[p]$ et que $a^{p-1}\equiv b^{p-1}[p]$ (utiliser Fermat)
4. en déduire que $a\equiv -b[p]$ on pourra remarquer que p s'écrit sous la forme $p=5+6k$ avec $k\in N^*$
5. on pose $a+b=pu$ avec $u\in\mathbb{N}^*$ montrer que $u\,(a-b)^2+(u-1)\,ab=1$ en déduire que $u\,(a-b)^2=1$
6. Montrer que $\begin{cases}a+b=p\\ |a-b|=1\end{cases}$
   en déduire dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E)

Exercice 3 12pts

soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$ et $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 2cm

Partie I étude d'une fonction

1. (a) calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
   et etudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$
   (b) Justifier que f est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
   (c) donner le tableau de variation
   (d) montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées
2. tracer la courbe $(\mathcal{C})$ on précisera la tangente à $(\mathcal{C})$en l'origine O du repère et en I
   on prend $f(1) = e^{-1} \simeq 0.37$ et $f(2) = 2e^{-2} \simeq 0.27$
3. soit g la réstriction de f sur $[0,1]$
   (a) montrer que g réalise une bijection de $[0,1]$ vers $[0,e^{-1}]$
   (b) montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,e^{-1}[$ et calculer $\left(g^{-1}\right)'(0)$
   (c) tracer dans le même repère la courbe $\left(C_{g^{-1}}\right)$
   (d) calculer $\int_0^1 f(t)\,dt$ en déduire l'aire en cm^2du domaine D ensemble des points $M(x,y)$ vérifiants $x \in [0,1], y \in [0,1]$ et $g(x) \leq y \leq g^{-1}(x)$

Partie II étude d'une suite récurrente

soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$

1. montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in [0,1]$
2. montrer que la suite est décroissante en déduire qu'elle est convergente et donner sa limite
3. pour chaque entier n on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$
   (a) montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = e^{-S_n}$
   (b) déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Partie III Etude d'une fonction définie par une intégrale

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} F(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{f(t)}{1+e^{-t}}dt \ , x \neq 0 \\ F(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

1. Justifier que $D_F = \mathbb{R}$.
2. à l'aide d'une intégration par changement de variable que :montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \int_0^{-x} \frac{f(t)}{1+e^{-t}}dt = \int_0^x \frac{u}{1+e^{-u}}du$$

   en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(-x) = 1 - F(x)$$

   et interpréter géométriquement le résultat .

3. (a) soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

   vérifier que $\forall t \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq f(t) \leq e^{-1}$ et que $\dfrac{1}{1+e^{-t}} \leq 1$ en déduire que: $0 \leq F(x) \leq \dfrac{2e^{-1}}{x}$

   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et Interpréter géométriquement le résultat

   (c) Montrer $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 1$ (utiliser la question III-2

4. soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ Montrer que $\dfrac{1}{1+e^x}\displaystyle\int_0^x t dt \leq \int_0^x \frac{f(t)}{1+e^{-t}} dt \leq \frac{1}{2}\int_0^x t dt$ et Déduire que F est continue en 0

5. soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

   (a) à l'aide d'une intégration par partie Montrer que

   $$F(x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{(1+e^t)^2} e^t dt$$

   (pour cela remarquer que $F(x) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \left(t^2\right)' . \frac{1}{1+e^t} dt$)

   (b) en remarquant que u est croissante sur $\mathbb{R}^+$ Montrer

   $$\frac{1}{(u(x))^2}\int_0^x t^2 dt \leq \int_0^x \left(\frac{t}{u(t)}\right)^2 dt \leq \frac{1}{(u(0))^2}\int_0^x t^2 dt$$

   (c) en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^* : -\dfrac{1}{6} \leq F'(x) \leq \dfrac{-2}{3}\dfrac{1}{(u(x))^2}$

6. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^* : F'(x) = \dfrac{2}{x}\left(\dfrac{1}{1+e^x} - F(x)\right)$

7. déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^* : F'(x) = \dfrac{-2}{x^3}\displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{u(t)}\right)^2 dt$ où $u(t) = e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}$

8. En utilisant le théorème des accroissements finis Montrer que F est dérivable en 0 et $F'(0) = -\dfrac{1}{6}$

9. Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0,1[$ en Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2} - e^{-n}$ admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}$

10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\alpha_n > 0$

11. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n \alpha_n = 6$